Ariketa 1	Ariketa 2	Ariketa 3	Ariketa 4	Ariketa 5	Guztira

Azterketaren iraupena: Ordu bat eta laurden

OHARRA: Azterketako emaitza guztiak behar den bezala arrazoitu behar dira.

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

1.- Kalkulatu $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{(2n+1)!\cdot(n+3)!\cdot n^5}{(3n+1)!}}$

(1.5 puntu)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(2n+1)!\cdot(n+3)!\cdot n^5}{(3n+1)!}} \overset{(Z-E)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)!\cdot(n+3)!\cdot n^5}{(3n+1)!}\cdot\frac{(3n-2)!}{(2n-1)!\cdot(n+2)!\cdot(n-1)^5} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)\cdot 2n\cdot(n+3)}{(3n+1)\cdot 3n\cdot(3n-1)}\cdot\frac{n^5}{(n-1)^5} = \frac{4}{27}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ limitea kalkulatzeko zatidura-errodura irizpidea erabil daiteke $a_n > 0 \quad \forall n$ baita.

2.- Kalkulatu $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+4+9+\ldots+n^2}{\left(e^{1/2n}-1\right)\cdot n^4}$

(1.5 puntu)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+4+9+\ldots+n^2}{\left(e^{1/2n}-1\right)\cdot n^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+4+9+\ldots+n^2}{\mathrm{L}\left(e^{1/2n}\right)\cdot n^4} = 2\lim_{n\to\infty} \frac{1+4+9+\ldots+n^2}{n^3} =$$

$$= 2\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^3-(n-1)^3} = 2\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^3-\left(n^3-3n^2+3n-1\right)} = 2\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{3n^2-3n+1} = \frac{2}{3}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ limitea kalkulatzeko Stolz-en irizipidea erabil daiteke, $b_n = n^3$ hertsiki gorakorra eta dibergentea baita.

3.- Aztertu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 3^{2n}}{2^n\cdot a^n}$ seriearen izaera $a>0$ parametroaren balioen arabera.

(2 puntu)

$\forall a>0,\ a_n=\frac{n\cdot 3^{2n}}{2^n\cdot a^n}>0 \quad \forall n$.

D´Alambert-en irizpidea erabiliz:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)\cdot 3^{2n+2}}{2^{n+1}\cdot a^{n+1}}}{\frac{n\cdot 3^{2n}}{2^n\cdot a^n}}=\frac{9}{2a}\begin{cases}<1 & \Leftrightarrow \quad a>\frac{9}{2} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty}a_n \text{ konbergentea da}\\ >1 & \Leftrightarrow \quad a<\frac{9}{2} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty}a_n \text{ dibergentea da}\\ =1 & \Leftrightarrow \quad a=\frac{9}{2} \quad \text{zalantzazko kasua da}\end{cases}$$

$a=\frac{9}{2} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 3^{2n}}{2^n\cdot a^n}=\sum_{n=1}^{\infty}n$ serie dibergentea (B.B. ez da betetzen)

<u>Oharra</u>: D´Alambert-en irizpidea erabili aurretik, B.B. betetzen denentz azter daiteke:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot 3^{2n}}{2^n\cdot a^n}=\lim_{n\to\infty}n\cdot\left(\frac{9}{2a}\right)^n=\begin{cases}\infty & \forall a\,/\,\frac{9}{2a}\geq 1\Leftrightarrow a\leq\frac{9}{2}\\ 0 & \forall a\,/\,\frac{9}{2a}<1\Leftrightarrow a>\frac{9}{2}\end{cases}$$

Beraz, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ dibergentea da $\forall a\leq\frac{9}{2}$

Eta, orain, $\forall a>\frac{9}{2}$, D´Alambert-en irizpidea erabiliko genuke.

4.- Aztertu $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^n+\mathrm{L}n}{5^n+n^2}+n\cdot\sin^2\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$ **seriearen izaera.**

(2 puntu)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^n+\mathrm{L}n}{5^n+n^2}+n\cdot\sin^2\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n+b_n\right)\text{, non }\left.\begin{array}{l} a_n=\dfrac{2^n+\mathrm{L}n}{5^n+n^2}\geq 0 \\ b_n=n\cdot\sin\left(\dfrac{1}{n^3}\right)\geq 0\end{array}\right\}\forall n$$

Konparaziozko irizpidea erabiliz:

$a_n=\frac{2^n+\mathrm{L}n}{5^n+n^2}\sim\frac{2^n}{5^n}=\left(\frac{2}{5}\right)^n$ eta $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n$ serie geometriko konbergentea da, $r=\frac{2}{5}<1$ baita. Beraz, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ ere konbergentea da.

$b_n=n\cdot\sin^2\left(\frac{1}{n^3}\right)\sim n\cdot\frac{1}{n^6}=\frac{1}{n^5}$ eta $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5}$ konbergentea da. Beraz, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ ere konbergentea da.

Orduan, emandako serie konbergentea da.

5.- a) Kalkulatu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{n+1}}{n+1} \cdot x^{n+1}$ berretura-seriearen batura, non balio duen adieraziz.

b) Zenbat gai batu beharko genuke seriearen batura hurbildua lortzeko $x = -\frac{1}{e}$ puntuan, errorea 0.001 baino txikiagoa izanik?

(3 puntu)

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{n+1}}{n+1} \cdot x^{n+1} = S(x) \quad \forall \in (-R, R)$. Eta, deribagarria da tarte horretan. Hau da:

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{n+1} \cdot x^n \overset{(*)}{=} \frac{e}{1-ex} \quad \forall x \in \left(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$$

(*) Serie geometrikoa da, $r = ex \Rightarrow$ konbergentea da $\Leftrightarrow |r| = e|x| < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{e}$

Emaitza hori integratuz:

$$S(x) = \int S'(x)dx = -\mathrm{L}(1-ex) + K \overset{(S(0)=0 \Rightarrow K=0)}{=} -\mathrm{L}(1-ex) \quad \forall x \in \left(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$$

Orain, tarte horretako mugak aztertuko ditugu:

$x = \frac{1}{e}$ puntuan: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{n+1}}{n+1} \cdot x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ dibergentea da $\Rightarrow \nexists S$

$x = -\frac{1}{e}$ puntuan: $\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{n+1}}{n+1} \cdot x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \text{ konbergentea da (Leibniz)(*)} \Rightarrow \exists S \text{ jarraitua} \\ \exists -\mathrm{L}(1-ex) \text{ eta jarraitua da} \end{cases}$

Beraz, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{n+1}}{n+1} \cdot x^{n+1} = -\mathrm{L}(1-ex) \quad \forall \in \left[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$

b) Aurreko atalean azaldu dugunez, $x = -\frac{1}{e}$ puntuan $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$ konbergentea da Leibniz-en teorema egiaztatzen baitu, eta, ondorioz, batura finitua (S) edukitzeaz gain:

$$|S - S_n| < |a_{n+1}|$$

Kasu honetan, $|S - S_n| < 0.001$ izatea eskatzen denez, $|S - S_n| < |a_{n+1}| \le 0.001$ noiz betetzen den kalkulatuko dugu:

$$|S - S_n| < |a_{n+1}| \le 0.001 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n+2} \le \frac{1}{1000} \quad \Leftrightarrow \quad n+2 \ge 1000 \quad \Leftrightarrow \quad n \ge 998$$

Batukaria $n = 0$ -tik hasten denez, 999 batugai batu beharko genuke.

(*) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$ Leibniz-en teoremaren baldintza biak betetzen ditu:

$$\text{i)} \ \lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \quad \text{eta} \quad \text{ii)} \ \{|a_n|\} = \left\{\frac{1}{n+1}\right\} \text{ beherakorra da.}$$